О. Горин

Универсальная структура n-мерноподобных объектов и треугольник Паскаля.

(история одного открытия)

ВВЕДЕНИЕ.

В июле-сентябре 2009-ого года мне довелось быть свидетелем и участником удивительного исследовательского процесса, результатом которого стало открытие некой универсальной, задаваемой аналитически структуры, представляющей в компактной форме свойства различных видов математических объектов различной (любой) размерности. Их объединяет между собой родственный способ связи какого-либо параметра такого объекта с двумя соседствующими параметрами такого же объекта, но на единицу меньшей размерности.

Само существование такой связи между параметрами однотипных, но на единицу различающихся размерностью объектов, делает каждый вид таких объектов уникальным, выделяющим его из всех других похожих видов объектов, продолжающим свои свойства в области, где другие виды уже просто не могут существовать!

Например, на первый взгляд может показаться, что квадрат и пятиугольник – просто плоские фигуры и какого-либо решающего преимущества друг перед другом не имеют. Однако квадрат продолжает свои свойства в область трёхмерного пространства, а пятиугольник – нет! То есть, построить из семи (или скольки-то ещё) плоских пятиугольников “трёхмерный пятиугольник” не получится, а из шести квадратов “трёхмерный квадрат” - куб – можно. А, вот, квадрат (куб) продолжает свои свойства и дальше, в четырёх-, пяти-, и, вообще, в любое n-мерное пространство! Почему? – Да, потому, что он принадлежит этой универсальной структуре, а это – одно из свойств таких объектов! То же самое можно сказать и о тетраэдрах (треугольниках). Тетраэдры же, вообще, открывают эту структуру, а кубы идут следом! Другие же виды объектов этой структуры вообще не имеют пока геометрической интерпретации, но, всё равно, они уникальны и продолжают свои свойства в области высоких значений величины **n**, которая в случае тетраэдров и кубов соответствует размерности пространства!

Какое это имеет значение? – Вполне может быть, что “закон” или “правило сборки” такого объекта может, каким-то образом, проявляться в закономерности явлений в данном n-мерном пространстве. Или, обратно, установив закономерность чего-либо, соответствующую, скажем, шестимерному кубу, мы смогли бы осознать, что естественно было бы рассматривать это явление в шестимерном пространстве.

Насколько эта структура информативна можно судить хотя бы по тому, что на вопрос “сколько граней содержит семимерный куб”, в считанные секунды можно дать точный ответ – оказывается, 672 грани! А шестимерный тетраэдр имеет, оказывается, 35 трёхмерных объёмов! И так – о любом свойстве объекта любой размерности и любого вида из бесконечной линейки их видов можно сказать!

Можно себе представить, насколько ёмкая у этой универсальной структуры форма представления: одна коротенькая формула, содержащая всего ничего символов, описывает любой параметр (то есть, то, что у куба и тетраэдра сопоставляется с количеством вершин, рёбер, граней, объёмов, 4-хмерных объёмов, 5-тимерных объёмов и так далее) у куба или тетраэдра любой размерности! А, также, любой параметр и у других подобных объектов. Просто невероятно! Она демонстрирует, что тетраэдры (треугольники) и кубы (квадраты) – это родственные в некотором универсальном смысле объекты! И эта особенная, необычная их природа выделяет эти (и похожие на них по этой природе) объекты из всех других и придаёт им уникальный смысл!

Это представление универсальной структуры позволяет, также, увидеть родственность происхождения структурных элементов кубов и тетраэдров – вершин, рёбер, граней и так далее. Их описание в универсальной структуре различается лишь одним параметром!

Следующим достижением является то, что открыт способ задавать виды этих объектов и говорить об их свойствах даже ничего не зная о формуле расчёта элементов этой универсальной структуры! Что это значит? - Это значит, что стало возможным, ничего не зная о современном математическом аппарате и даже ничего не зная о степени числа и факториале, о вычитании и делении, а, имея лишь представление об операциях сложения и умножения натуральных чисел, да, имея наглядное представление, скажем, о двумерном кубе – квадрате – за несколько минут сказать сколько, скажем, рёбер у шестимерного куба? – оказывается, 192 ребра! И это значит, что на это, в принципе, могли быть способны люди в древности! Именно таким способом на пути к универсальной структуре была построена таблица “свойств кубов любой размерности”, а потом и таблица “свойств тетраэдров любой размерности”.

Ещё одним достижением явилось открытие уникального объекта с удивительными свойствами – элементарного тетраэдра. Этот объект, в силу своей противоречивости и невообразимости, не мог быть обнаружен в виде “кирпичика” ещё “не собранной” структуры! Но, когда появилась часть структуры, вопрос о новом объекте появился “в повестке дня”, а когда была построена вся структура, его математическая реальность стала просто неумолимой!

Но, обо всём по порядку.

Начало.

В то время действовал, и я регулярно его посещал, научный семинар Юрия Ивановича Кулакова, чьи вдохновенные лекции по Теории Физических Структур произвели на меня, в своё время, сильное впечатление. В 2008 – 2009 годах, в продолжение развития Теории Физических Структур, он занимался поиском “фундаментальных кирпичиков мироздания”. В своём исследовании он пришёл к выводу, что мироздание, собственно, феноменологический мир, в своих закономерностях является следствием проявления более тонкой реальности – информационной. И, вот, о мире этой реальности и о его основаниях он нам с увлечением рассказывал на своих семинарах.

В его исследовании большую роль играли треугольник Паскаля и n-мерный куб, вновь и вновь он заострял наше внимание на свойствах этих объектов, так что, в частности, я основательно “пропитался” их удивительным существом!

Посещала семинар, также, и Станислава Михайловна Гаврилюк. Стоит сказать, что семинар Юрия Ивановича – редкая возможность “подышать воздухом” живой исследовательской мысли касаемо основ бытия! Это многого стоит! Если в человеке есть исследовательская увлечённость в плане основ мироздания, то, даже без специальной подготовки, семинар, конечно, поможет ей проявиться! И Станислава, и я уверены, что, если бы не семинар Юрия Ивановича, никакого открытия не состоялось бы, и писать мне сейчас было бы не о чем!

Как-то, пообщавшись со Станиславой, я узнал, что её, также как и меня, увлекают основы мироздания. И она хочет познать, как в своей основе устроен наш мир. Может быть, это желание выглядело слишком претенциозным, но, зато, сколько решимости, упорства и безграничной веры в успех, на другой взгляд, столь сомнительного предприятия, было в ней!

Существует мнение, что наше пространство имеет кубическую природу и ничто не мешает начать поиск, например, с того утверждения, что в основе нашего мира лежит куб!

Летом 2009 года Станислава спрашивала у меня:

- Олег, а сколько вершин у n-мерного куба?

- Ну, вот выражение…

Через некоторое время:

- Олег, а сколько сторон (рёбер, традиционно) у n-мерного куба?

- Ну, вот формула,.. – а сам подумал, что же мне ей сказать, если она спросит о количестве граней, что-то не уверен я, что смогу написать ей такую формулу!

Эх, если бы я только мог тогда себе представить, насколько глобально она мыслит и что, в конце концов, встанет вопрос о написании единой формулы не только для количества граней, но и, вообще, для любого параметра некоего n-мерного объекта и не обязательно куба! И, если бы я только мог тогда себе представить, что такая формула существует и будет установлена! Но, опять же, обо всём по порядку.

Таблица всех кубов.

В середине августа 2009-ого года я получил от Станиславы сообщение о том, что она нашла, как посчитать любой параметр у куба любой размерности! Оно было продолжением нашей переписки на эту тему, перед этим я ответил ей, как посчитать количество рёбер у n-мерного куба. Свой результат она представила в виде таблицы и отправила мне. Вот это письмо с моим предыдущим ответом я хотел бы здесь привести (письмо подвергнуто минимальной коррекции, что не коснулось собственно текста писем и даты).

От: G. Slava
Кому: Олег Горин

14.08.09, 08:42, "Олег Горин"

```
> У 4-х мерного куба будет 32 стороны:
> 4•1 + 3•4 + 2•6 + 1•4 + 0•1 = 32
> У 5-ти мерного куба будет 80 сторон:
> 5•1 +4•5 + 3•10 + 3•10 + 1•5 + 0•1 = 80
> У 6-ти мерного куба будет 192 стороны:
> 6•1 + 5•6 + 4•15 + 3•20 + 2•15 + 1•6 + 0•1 = 192
> Это станет ясным и очевидным, если рассмотреть куб с точки зрения
> этажей, то есть, если его поставить на вершину, тогда все его вершины
> расположатся этажами и будут видны их связи с другими вершинами.
> Аналитически число сторон у n-мерного куба L можно представить так:
>                                    0
>                               L  = ∑ K•Cnk
>                                   k=n
> где   Cnk = n!/(k!(n-k)!)      - биномиальный коэффициент
> Олег
```

--

Привет, я пока в Красноярске и добралась до компьютера.

Тогда вечером, когда я спрашивала, как посчитать вершины, заснуть я конечно же не смогла и придумала как считать и вершины и все остальное за ночь, а утром получив это письмо убедилась что ответы сходятся. У меня получилась таблица, которую сегодня мне удалось засунуть в компьютер, посылаю тебе таблицу. Интересно, может быть я изобрела велосипед, а может быть пора Нобелевскую премию получать? Еще я хотела бы тебя попросить написать формулы и правила в этой таблице нормальным математическим языком.

Станислава

И, вот, я смотрю на таблицу (1)! Ну, что сказать? – Грандиозно!!! Ведь, это получено лишь с привлечением понятия числа и операции сложения-умножения! Да ещё привлечены наглядные представления о квадрате и кубе. Ну, как возможно, исходя лишь из этого, сказать, что у пятимерного куба восемьдесят граней?! Фантастика! Как такое возможно? С помощью какого “золотого правила” посчитаны числа в таблице?

Здесь мы подходим к ключевому вопросу всей статьи – обоснованию метода построения таблиц n-мерноподобных объектов вообще и таблицы кубов, в частности. Это важный момент! Осознать метод построения таблицы – значит привнести в таблицу смысл! В противном случае, это будет казаться лишь курьёзом или, даже, случайным совпадением, не имеющим особой ценности. Вот почему на это стоит потратить немного усилий!

О себе скажу, что ни красноречивость самой таблицы, ни попытка Станиславы объяснить мне метод по телефону не возымели действия! И только в личной беседе мне стало ясно, как просто и изящно была построена эта таблица!

Итак, приступим к обоснованию таблицы кубов!

По вертикали, как видно, откладывается размерность куба, а по горизонтали – количество элементов, с последовательным возрастанием размерности элемента. То есть, в первом столбце указывается количество элементов кубов с наинизшей (нулевой) размерностью, то есть, вершин. Во втором – количество элементов кубов со следующей, единичной размерностью, то есть, количество рёбер. Далее – количество граней, далее – количество объёмов, далее – количество четырёхмерных объёмов и так далее. Помню своё удивление от открытия для себя, благодаря таблице, как естественно по мере увеличения размерности куба у него появляются четырёхмерные, пяти-, шести-, семимерные объёмы!!! До этого обратить внимание и осознать этот факт мне как-то не случалось!

Конечно, в этом подходе поиска параметров n-мерного куба (и n-мерного объекта вообще), революционной и первооткрывающей является та идея, что параметры кубов разных размерностей как-то друг с другом связаны! Предположить это - поистине, выдающийся шаг!

Самую суть правила построения таблицы разберём на примере перехода от двумерного куба – квадрата – к трёхмерному – собственно, кубу.

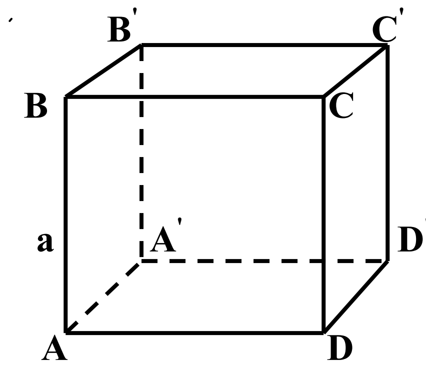

Рис. 1

Вот мы переходим от двумерного куба **ABCD** к трёхмерному **- ABCDA'B'C'D'** (рис.1). Спрашивается, как связано количество элементов трёхмерного куба с количеством элементов предшествующего ему двумерного куба? Для того, чтобы это понять, представим себе процесс перехода от двумерного куба к трёхмерному как параллельный перенос двумерного куба **ABCD** – квадрата – перпендикулярно плоскости **ABC** на расстояние стороны квадрата **a** (в дальнейшем – просто “параллельный перенос”).

Видим, что, в результате, двумерный куб **ABCD** сам становится частью трёхмерного и, кроме того, породил на расстоянии a параллельно себе свою копию – квадрат **A'B'C'D'**. Это значит, что двумерный куб **ABCD** при переходе к трёхмерному просто-напросто удвоился!

Но это не всё. Из каждого ребра квадрата **ABCD** в кубе **ABCDA'B'C'D'** произойдёт по одной грани!

Но, самое интересное – это то, что эти правила касаются <u>любых элементов кубов любой размерности</u>!

То есть, какой бы элемент n-мерного куба мы ни рассмотрели, при переходе к кубу размерности (n+1) он удвоит сам себя и даст один элемент на единицу большей размерности, чем он сам!

То есть, если нас интересует, сколько граней у трёхмерного куба, то мы можем на это ответить, зная лишь сколько граней и рёбер у двумерного куба – квадрата:

В трёхмерном кубе количество граней будет = 2 · (количество граней в двумерном кубе) + 1 ·(количество рёбер в двумерном кубе)

Или так:

$$N_3^2 = 2 \cdot N_2^2 + 1 \cdot N_2^1 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 6$$

Далее, предполагаем, что это и есть универсальное правило, связывающее параметры кубов соседних размерностей! Вот и всё.

Теперь, произнося это правило, как заклинание, мы с легкостью можем получать параметры кубов любой размерности!

Например, сколько объёмов содержит 4-хмерный куб? – При параллельном переносе трёхмерного куба в область четвёртого измерения все трёхмерные объёмы трёхмерного куба (их у него только один) удвоятся, итак – два, да плюс каждый элемент трёхмерного куба на единицу меньшей размерности – грань (их у трёхмерного куба шесть) – произведёт в четырёхмерном кубе по одному трёхмерному объёму, то есть, шесть! Итого, два плюс шесть – будет восемь трёхмерных объёмов у четырёхмерного куба!

А сколько четырёхмерных объёмов будет у четырёхмерного куба? – Четырёхмерных объёмов у трёхмерного куба ноль, при переходе к четырёхмерному кубу их количество удвоится и это даст $2 \cdot 0 = 0$.
Количество элементов на единицу меньшей размерности куба – трёхмерных объёмов – у трёхмерного куба один. Каждый элемент трёхмерного куба этой размерности произведёт по одному элементу размерности на единицу большей в кубе следующей размерности. Итого, количество четырёхмерных объёмов в 4-хмерном кубе будет равно:

$$\mathbf{N_4^4 = 2 \cdot N_3^4 + N_3^3 = 2 \cdot 0 + 1 = 1}$$

<u>Вопрос:</u> сколько рёбер у трёхмерного куба, если у двумерного куба – квадрата – четыре ребра и четыре вершины?
<u>Ответ:</u> согласно общему правилу:

$$\mathbf{N_3^1 = 2 \cdot N_2^1 + N_2^0 = 2 \cdot 4 + 4 = 12}$$

В общем виде это правило можно записать так:

$$\mathbf{N_n^k = 2 \cdot N_{n-1}^k + N_{n-1}^{k-1}} \qquad \mathbf{1)}$$

Конечно, на первый взгляд, выражение 1) для произвольных значений n выглядит недостаточно обоснованным. Однако обратим внимание на то, почему, вообще, возникла идея связывать параметры соседних кубов? – Да потому, что Станислава рассмотрела куб как порождение квадрата методом параллельного переноса! И обратила внимание на красноречивую связь элементов одного с элементами другого! И предположила, что кубы размерности $\mathbf{n > 3}$ будут образовываться из кубов размерности на единицу меньшей всё тем же параллельным переносом последнего в область нового измерения! Правило 1) просто математически оформляет эту идею и, чтобы оно не работало в каком-то случае надо, чтобы образование какого-либо куба нельзя было бы рассмотреть как параллельный перенос куба на единицу меньшей размерности в направлении нового измерения! А это сразу же привело бы к появлению у такого куба неких свойств, в принципе у кубов никогда не наблюдающихся – как то несоразмерность сторон и углы, отличающиеся от прямых… Но, что нам мешает применить к тому кубу, с которого, на следующем этапе, образуется “странный куб”, параллельный перенос и получить объект на единицу большей размерности со всеми свойствами кубов? – Конечно, ничего не мешает! А, что нам мешает сделать это с самого начала – применить параллельный перенос к заданию последовательности n-мерных объектов с прямыми углами между элементами и с одинаковой длиной рёбер, начав её с точки? – Ничего не мешает! А что нам мешает такой n-мерный объект, не имеющий “некубовых” свойств, назвать n-мерным кубом? – Ничего не мешает! Потому, выражение 1), устанавливающее связь между элементами кубов двух соседних размерностей, только может казаться недостаточно обоснованным, а, на деле, выражает идею параллельного переноса при образовании из куба куба на единицу большей размерности!

Конечно, к обычному представлению о кубе двумерном (квадрате) и кубе трехмерном (собственно, кубе) здесь добавлена идея существования их обобщения – (n-1)-мерного куба и правило образования из него n-мерного куба путём ортогонального параллельного переноса (n-1)-мерного куба в направлении, перпендикулярном пространству (n-1)-мерного куба на длину ребра куба. Но она строго обоснована: если (n-1)-мерный куб существует, то, по указанной причине, существует и n-мерный куб, от которого можно придти к (n+1)-мерному кубу и так далее. Двух- (или трёх-) мерные кубы существуют, следовательно, существуют и кубы любых более высоких размерностей! Не установлены, таким образом, только кубы нулевой и единичной размерностей. Но, их установить не сложно, если заметить, что кубы меньших размерностей являются структурными элементами для кубов высших размерностей (точнее, (n-1)-мерные кубы ограничивают n-мерный куб)! А из чего состоит (то есть, что ограничивает) двумерный куб - квадрат? – из отрезков… Значит, отрезки претендуют оказаться одномерным кубом! Проверим: можно ли получить квадрат, применяя правило параллельного переноса к отрезку? – Конечно! Значит отрезок в данном определении куба – одномерный куб! А из чего он состоит? – из точек! С получением отрезка из точки методом параллельного переноса её в новое измерение – проблема, ведь, длины ребра у нульмерного куба никакой нет! Но, это естественно, ведь, куб - нульмерный! А для чего при получении n-мерного куба нам нужно было переносить (n-1)-мерный куб в перпендикулярном его пространству направлении именно на длину его ребра? – Чтобы у образовавшегося в результате n-мерного куба все рёбра оказались одинаковой длины! А, если

у (n-1)-мерного куба нет никаких рёбер? – То, стало быть, и ограничения на длину параллельного переноса никакого нет и она может выбираться из любых соображений, всё равно у вновь образованного куба все рёбра окажутся одинаковой длины, даже если бы, по какой-то причине, оно было бы не одно! Таким образом, длину ребра, в этом случае, мы можем привнести извне! И, таким образом, точка – нульмерный куб!

Удивительно, что таблицу кубов Станислава написала, не имея, изначально, даже умозрительного представления о связи параметров двух кубов соседних размерностей! Но она это обнаружила и продолжила в область невообразимых n-мерных кубов! И, построив таблицу кубов 1, попросила меня изложить этот уникальный факт "нормальным математическим языком", что я и сделал, написав выражение 1). Параллельно, она и сама получила это выражение, но остался вопрос: где та формула, без сомнения, простая и красивая, по которой "влёт" мы могли бы получить число в любом месте таблицы? Её пока не было.

(Хронологический порядок событий у меня и Станиславы, почему-то, несколько разошёлся, что, в конце концов, не так уж важно. И мою версию истории можно понимать не столько "так оно было", сколько "так могло быть").

Таблица всех тетраэдров.

Рассматривая таблицу 1 в плане отыскания "простой и красивой" формулы для расчета её элементов, меня не покидало ощущение, что, находясь на уровне этой таблицы, мы очень близки к началу, но не в самом начале, что на этом уровне ситуация уже немного усложнилась и, возможно, поэтому формула для её элементов ускользает.

Что именно сложно? – метод построения n-мерного куба из (n-1)-мерного, метод параллельного переноса (n-1)-мерного куба в пространство нового измерения на длину ребра куба. Ведь, в конечном счёте, переход от (n-1)-мерного куба к n-мерному – это способ создания n-мерного объёма! И, в случае кубов, этот объём возникает при соединении вершин (n-1)-мерного куба с их образами в новом измерении. Естественно, этих образов много ($2^{(n-1)}$ образов!), они образуют целый (n-1)-мерный куб! В каком-то смысле, это сложно. Для того чтобы получить n-мерный объём из (n-1)-мерного, достаточно взять **единственную** точку где-то в новом измерении и соединить с нею все вершины (n-1)-мерного куба! (Или, точнее, все точки границ (n-1)-мерного куба).

Этот другой способ получения n-мерного объёма из (n-1)-мерного реализован… в тетраэдре (треугольнике)! А, значит, есть прямой повод построить аналогичную таблицу для всех тетраэдров (треугольников) и поискать закономерности в заполнении числами уже этой таблицы!

Снимаю трубку, звоню Станиславе, объясняю, что есть смысл построить такую же таблицу и для треугольников (тетраэдров). И тут уже пришёл черёд для её непонимания:

- Пространство создано на основе кубов, причём тут треугольники?!

- Это важно для развития идеи твоей таблицы, нужно построить таблицу для треугольников (тетраэдров) и посмотреть, что за числа будут её заполнять! Это должна быть более простая, по сравнению с кубами, ситуация!

- Хорошо.

Уф… кажется, поняла, кажется, осознала, а, значит, сделает, справится, и её уникальный исследовательский процесс пойдёт дальше!.. Так, что же там таблица треугольников (тетраэдров)? Надо бы посмотреть…

Беру карандаш, набрасываю таблицу… и… что я вижу! Невероятно! Это, прямо, фантастика какая-то!..

Через несколько дней звонит Станислава:

- Послушай, ты что-то говорил о таблице треугольников (тетраэдров), что это важно. Не мог бы ты мне об этом рассказать?

- Хорошо, приезжай, - а сам думаю: “Чудеса, да и только! Ведь, она сформулировала и решила задачу расчета параметров n-мерного куба, построила таблицу кубов! Ну, что могло вызвать у неё затруднение в случае с треугольниками (тетраэдрами)?”

В чём состоит задача, что нужно сделать? – Нужно выразить элементы n-мерного тетраэдра через элементы (n-1)-мерного тетраэдра, создать общее правило и построить таблицу.

Опять-таки, за основу возьмём треугольник и тетраэдр и посмотрим на тетраэдр как на развитие треугольника в новое измерение (рис.2).

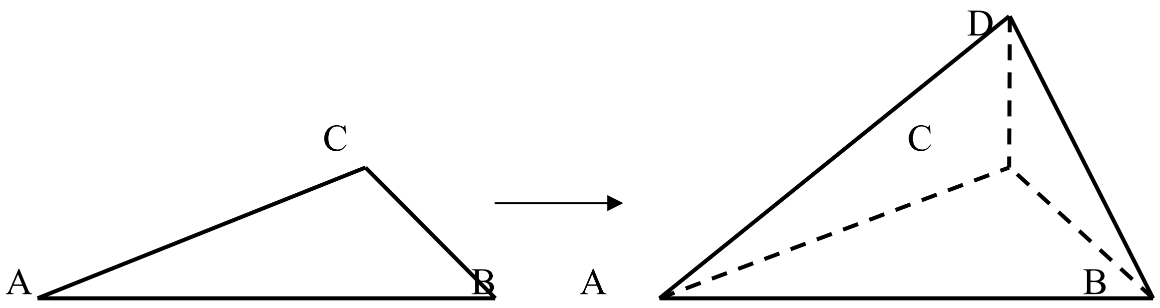

Рис.2

То есть, перейдём от двумерного тетраэдра ABC (треугольника) к трёхмерному – ABCD и найдём, как выражаются его элементы через элементы тетраэдра ABC (рис. 2).

Опять, как и в случае с кубами, посмотрим, сколько граней у тетраэдра ABCD и из каких элементов треугольника ABC они “возникли”? (Кавычки – из-за того, что, всё-таки, “развитие двумерного тетраэдра в трёхмерный” – это хоть и естественный способ придти к трёхмерному тетраэдру, но не единственно возможный. Всё-таки, в большой мере, это игра воображения.)

Как видно, грань тетраэдра ABCD, ABC образовалась из единственной грани треугольника ABC, а три другие грани образованы из трёх рёбер треугольника ABC. Эта интерпретация следует из **правила построения треугольника (тетраэдра)**:

> **чтобы получить n-мерный треугольник (тетраэдр) из (n-1)-мерного, нужно в пространстве (n-1)-мерного треугольника (тетраэдра) найти точку, равноудалённую от его вершин, провести через неё перпендикулярно (n-1)-мерному пространству линию, взять на этой линии точку, такую, чтобы, соединив её с вершинами (n-1)-мерного треугольника (тетраэдра) мы получили бы фигуру с равными по длине рёбрами. Эта фигура и есть n-мерный треугольник.**

То есть, всё очень похоже на то, что было в случае кубов при параллельном переносе, но вместо образа (n-1)-мерной фигуры, дающей удвоение исходного (n-1)-мерного объёма в n-мерной фигуре у нас есть только точка D, поэтому, единственная грань треугольника ABC в тетраэдре ABCD не удваивается, а лишь дублируется! Поэтому, исходная формула в случае тетраэдров должна иметь вид:

$$T_n^k = T_{n-1}^k + T_{n-1}^{k-1} \qquad 2)$$

Где T_n^k – количество k-мерных элементов в n-мерном тетраэдре.

Как видим, выражение 2) для тетраэдров оказалось похожим на выражение 1) для кубов! Только перед первым слагаемым там стоял множитель 2.

Проверим выражение 2) на других примерах.

Пример1. Рассчитать количество трёхмерных объёмов тетраэдра ABCD через элементы треугольника ABC по формуле 2. Проверить соответствие реальности.

Решение. Согласно формуле 2) :

$$T_3^3 = T_2^3 + T_2^2$$

где T_2^3 – это количество трёхмерных объёмов двумерного тетраэдра – треугольника, оно равно нулю.

T_2^2 – количество двумерных объёмов треугольника, оно равно единице, значит:

$$T_3^3 = 0 + 1 = 1$$

Ответ соответствует реальности.

Пример 2. Рассчитать количество рёбер у тетраэдра через количество элементов треугольника.

Решение.

$$T_3^1 = T_2^1 + T_2^0$$

Где T_2^1 – количество рёбер у треугольника, равно трём;

T_2^0 – количество вершин у треугольника, равно трём.

Итого, получаем:

$$\mathbf{T_3^1 = 3 + 3 = 6}$$ – ответ правильный.

Итак, расхождения с реальностью выражения 2) не обнаружено.

Теперь приступим к построению таблицы тетраэдров.

Попробуем понять, что за число стоит в левом верхнем углу таблицы? – элемент $\mathbf{T_0^0}$ **– количество нульмерных элементов тетраэдра, у которого число n=0.**

Здесь есть особенность. Мы не говорим, что это за тетраэдр, то есть, какова его размерность. В случае кубов всё, казалось (и оказалось в дальнейшем), было просто – величина $\mathbf{N_0^0}$ обозначала количество нульмерных элементов нульмерного куба, то есть, количество вершин у нульмерного куба, который, вроде бы, являясь точкой, должен совпадать с вершиной. И, понятно, что значение $\mathbf{N_0^0}$ должно быть равно единице. И, вроде бы, величина $\mathbf{T_0^0}$ должна обозначать то же, но для тетраэдров. То есть, вроде бы, $\mathbf{T_0^0}$ – это количество вершин у нульмерного тетраэдра, который, вроде бы, является точкой и должен совпадать с вершиной тетраэдра. Таким образом, значение $\mathbf{T_0^0}$, вроде бы, должно быть равно единице. С точки зрения выбранного здесь метода исследования – допускать что-то, пока не придём к противоречию – мы можем так считать.

Итак, будем пока считать, что $\mathbf{T_0^0}$ – это количество нульмерных элементов у нульмерного тетраэдра, то есть, количество вершин тетраэдра у нульмерного тетраэдра - точки.

Далее, попробуем понять, чему равно $\mathbf{T_0^0}$? Вроде бы, $\mathbf{T_0^0}$ должно равняться единице. Но, поскольку, окончательно ясного представления о том, что такое нульмерный тетраэдр у нас пока нет, выразим $\mathbf{T_0^0}$ через параметры тетраэдра более высокой размерности – одномерного. (Хотя, конечно, в силу выбранного подхода к исследованию, мы могли бы предположить, что $\mathbf{T_0^0=1}$ и пойти дальше. Но, поскольку, мы можем придти к этому, опираясь на более ясные, на данный момент вещи, то приведём тут это рассуждение). Для этого используем выражение 2):

$$\mathbf{T_1^1 = T_0^1 + T_0^0} \qquad \mathbf{3)}$$

Но, у нульмерного тетраэдра нет одномерных элементов! Следовательно, $\mathbf{T_0^1 = 0}$. Откуда следует:

$$T_1^1 = T_0^0 \qquad 4)$$

Но, что такое $\mathbf{T_1^1}$? – это количество одномерных элементов у одномерного тетраэдра. А, сколько их? – За отсутствием на данном этапе полной ясности о том, что представляет собой одномерный тетраэдр, выразим его элементы через элементы двумерного тетраэдра.

Согласно 2), напишем:

$$T_2^2 = T_1^2 + T_1^1 \qquad 5)$$

Но, у одномерного тетраэдра нет двумерных элементов, следовательно, $\mathbf{T_1^2 = 0}$, и получаем:

$$T_2^2 = T_1^1 \qquad 6)$$

Но, $\mathbf{T_2^2}$ – это количество двумерных элементов – граней – у двумерного тетраэдра (треугольника), их количество, понятно, равно 1, значит, на основании 4), 6) получаем $\mathbf{T_1^1=1, T_0^0=1}$.

Итак, таблица тетраэдров должна начинаться так:

элементы T_n^k с различными k / **различные значения n, различные тетраэдры**	T_n^0	T_n^1	T_n^2
n=0, нульмерный тетраэдр	**1**		
n=1, одномерный тетраэдр		**1**	
n=2, двумерный тетраэдр			**1**

Рис.3

Ясно, что всегда, когда будет **k=n**, элемент T_{n-1}^{n} будет равен нулю и формула 2) даст:

$$T_n^{n} = T_{n-1}^{n-1} \qquad 7)$$

То есть, на диагонали таблицы тетраэдров расположатся единицы! И, поскольку, число $T_n^k=0$ при **k>n**, то выше единиц будут располагаться нули:

элементы T_n^k с различными k / различные значения n, различные тетраэдры	T_n^0	T_n^1	T_n^2
n=0, нульмерный тетраэдр	**1**	**0**	**0**
n=1, одномерный тетраэдр		**1**	**0**
n=2, двумерный тетраэдр			**1**

Рис.4

Следующим элементом нужно рассчитать T_1^0 – количество вершин одномерного тетраэдра.

Если одномерный тетраэдр имеет одно ребро, то у него должно быть две вершины, то есть, $T_1^0=2$. Так это или не так можно установить, приняв за аксиому, что у двумерного тетраэдра – треугольника – три вершины ($T_2^0=3$), три ребра ($T_2^1=3$) и одна грань ($T_2^2=1$). Заполнив таким образом третью строку, для поиска T_1^0 применим 2):

$$T_2^1 = T_1^1 + T_1^0 \qquad 8)$$
$$3 = 1 + T_1^0$$

Откуда получаем:

$$T_1^0 = 3 - 1 = 2 \qquad 9)$$

Итак, в свете сделанного утверждения о двумерном тетраэдре, одномерный тетраэдр, действительно, обладает параметрами ребра с двумя вершинами!

Параметры трёхмерного тетраэдра мы тоже хорошо знаем, но, можем рассчитать их, использовав формулу 2) (кроме количества его вершин, которое введём вручную, опираясь, всё-таки, в этом вопросе, на представление о трёхмерном тетраэдре. Позже мы вернёмся к этому вопросу, рассмотрим его подробно и наведём там порядок!). Таблица будет выглядеть так:

элементы T_n^k с различными k / различные значения n, различные тетраэдры	T_n^0	T_n^1	T_n^2	T_n^3	T_n^4
n=0, нульмерный тетраэдр	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
n=1, одномерный тетраэдр	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**
n=2, двумерный тетраэдр	**3**	**3**	**1**	**0**	**0**
n=3, трёхмерный тетраэдр	**4**	**6**	**4**	**1**	**0**
n=4, четырёхмерный тетраэдр					**1**

Рис.5

О-о-ооо!!! Как это всё напоминает треугольник Паскаля, только слева, как будто, пропущен ряд единиц, и сразу идёт ряд натуральных чисел! Неужели, всё оказывается предельно просто, и формула для количества элементов n-мерного тетраэдра уже не за горами?

Действительно, почему мы удивляемся такому чудесному совпадению? В том смысле, почему мы удивляемся ему только сейчас? Ведь, правило построения таблицы тетраэдров 2) в точности совпадает с правилом построения треугольника Паскаля! Вот, когда мы получили правило построения таблицы тетраэдров 2), тогда и надо было удивляться!

Однако почему треугольник Паскаля как таблица тетраэдров получается не целостный, а урезанный? Ведь, он – целостная структура и, описывая целостную структуру – систему всех тетраэдров – он должен бы появиться целиком… А, может быть, он и описывает целостную систему – систему всех тетраэдров – но мы, из-за склонности слишком доверять наглядным представлениям, часть этой системы, попросту, не замечаем? Тем более что с первым рядом ($\mathbf{T_n^0}$) в нашей таблице тетраэдров происходит что-то не то – ну, не подчиняется он формуле 2), а она, между прочим, как раз задаёт всю структуру тетраэдров!

Именно к формуле 2) нужно обратиться, чтобы понять, пропустили ли мы, что-нибудь, описывая систему тетраэдров и строя таблицу или нет? Ведь, именно посредством этой формулы связаны друг с другом элементы тетраэдров разных размерностей! И, разумно предположить, что она как раз и определяет всю систему тетраэдров!

Конечно, таким образом, встаёт вопрос о двух определениях тетраэдра: первом - как геометрической фигуры с распространением этого представления в пространства других (высших) измерений с помощью вышеозвученного правила построения треугольника (тетраэдра). И втором - как математического объекта в различных состояниях, которые представлены строками таблицы тетраэдров, построенной с помощью правила 2). (Это определение задаёт не только тетраэдры – правильные треугольники, но и неправильные треугольники тоже!)

Мы можем не осознавать чего-то, что не имеет убедительной наглядной интерпретации, но формула 2) равнодушна к наглядным представлениям и четко задаёт целиком всю систему тетраэдров, связывая элементы одного тетраэдра с элементами другого. И, если мы попытаемся рассчитать первый элемент в любой строке по формуле 2) через элементы предыдущей строки (предыдущего тетраэдра), то у нас неминуемо появится новый, неожиданный параметр $\mathbf{T_n^k}$ с отрицательным значением $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{T_n^0 = T_{n-1}^0 + T_{n-1}^{-1}} \qquad \mathbf{10)}$$

Причём, величина $\mathbf{T_{n-1}^{-1}}$ всегда равна единице! Это следует из способа построения **n**-мерного тетраэдра на основе **(n-1)**-мерного: мы просто добавляем одну вершину в направлении нового измерения, поэтому у тетраэдра на единицу меньшей размерности количество вершин всегда на единицу меньше и поэтому, согласно формуле 2) и 10), величина $\mathbf{T_{n-1}^{-1}}$ всегда будет равна единице. Причём, формула 2) приводит к существованию ненулевых значений $\mathbf{T_n^{-1}}$, и она же приводит к нулевым значениям $\mathbf{T_n^k}$, если k< -1!

Действительно, найдём значение $\mathbf{T_n^{-2}}$.

Для этого представим $\mathbf{T_n^{-1}}$ по формуле 2):

$$\mathbf{T_n^{-1} = T_{n-1}^{-1} + T_{n-1}^{-2}} \qquad \mathbf{11)}$$

Но, как мы установили, $\mathbf{T_n^{-1} = T_{n-1}^{-1} = 1}$, откуда следует, что

$$\mathbf{T_{n-1}^{-2} = 0} \qquad \mathbf{12)}$$

Если в выражении **2)** значение **k** выбрать теперь не **-1**, а **-2**, то получим, что $\mathbf{T_{n-1}^{-3}=0}$, а, если выберем значение **k=-3**, то получим, что $\mathbf{T_{n-1}^{-4}=0}$ и так далее. Следовательно, получаем, что $\mathbf{T_n^k = 0}$ при k<-1.

Теперь мы можем достроить таблицу тетраэдров ещё одним рядом, а тетраэдрам присвоить ещё один параметр – $\mathbf{T_n^{-1} =1}$.

элементы T_n^k с различными k / различные значения n, различные тетраэдры	$\mathbf{T_n^{-1}}$	$\mathbf{T_n^0}$	$\mathbf{T_n^1}$	$\mathbf{T_n^2}$	$\mathbf{T_n^3}$	$\mathbf{T_n^4}$
n=0, нульмерный тетраэдр	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
n=1, одномерный тетраэдр	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**
n=2, двумерный тетраэдр	**1**	**3**	**3**	**1**	**0**	**0**
n=3, трёхмерный тетраэдр	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**	**0**
n=4, четырёхмерный тетраэдр	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**

Рис.6

Удивительное дело! Добавив в таблицу слева ряд единиц ($\mathbf{T_n}^{-1}$), мы, для того, **чтобы найти параметры любого тетраэдра, можем совершенно забыть обо всех наглядных представлениях о тетраэдрах**, а знать лишь параметры, скажем, самого верхнего в таблице тетраэдра и правило 2) и, действуя автоматически, найти их! Таким образом, с добавлением ряда $\mathbf{T_n}^{-1}$, ситуация заметно гармонизировалась!

Глядя на таблицу на рисунке 7, так и хочется добавить сверху ещё одну строку с одной-единственной единицей, чтобы получился треугольник Паскаля! Но, это надо обосновать!

Хорошо, зададимся вопросом: предрекает ли нам правило 2) существование вышележащей строки в таблице на рисунке 6? – Конечно, предрекает, ведь, ненулевые числа в первой строке таблицы откуда-то взялись! Причём, эта вышележащая строка, формально, может быть разной:

а)

½	**-½**	**½**	**-½**	**½**	**½**	**½**	**-½**	**½**	**-½**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**

б)

1	**-1**	**1**	**-1**	**1**	**0**	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**

в)

0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**

Однако, добавляя новую строку, мы помним, что она представляет собой количества элементов какого-то тетраэдра! То есть, нас могут заинтересовать на предмет соответствия какому-либо тетраэдру только те строки, в которых находятся целые положительные числа или нули! Ну, действительно, ведь, не может быть у тетраэдра “минус одно ребро” или “половина вершины”! Зато, каждая строка, содержащая целые положительные числа или нули просто “кричит” и “недвусмысленно намекает” на существование тетраэдра в системе тетраэдров именно с такими числами его параметров!

Покажем, что решение, удовлетворяющее вышеуказанным свойствам существует, оно единственно и соответствует случаю в).

Применим к строкам с **n=0** и **n=-1** формулу 2), получим:

$$\mathbf{T_0^{0} = T_{-1}^{0} + T_{-1}^{-1}} \qquad \mathbf{13)}$$

$$\mathbf{T_0^{-1} = T_{-1}^{-1} + T_{-1}^{-2}} \qquad \mathbf{14)}$$

Так как $\mathbf{T_0^{-1}=1}$, $\mathbf{T_0^{0}=1}$, то получаем:

$$\mathbf{1 = T_{-1}^{0} + T_{-1}^{-1}} \qquad \mathbf{15)}$$

$$\mathbf{1 = T_{-1}^{-1} + T_{-1}^{-2}} \qquad \mathbf{16)}$$

Вычитая из второго выражения первое, получим:

$$\mathbf{T_{-1}^{0} = T_{-1}^{-2}} \qquad \mathbf{17)}$$

Таким образом, мы получили систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{1 = T_{-1}^{-1} + T_{-1}^{-2}} & \qquad \mathbf{18)} \\ \mathbf{T_{-1}^{0} = T_{-1}^{-2}} & \qquad \mathbf{19)} \end{array} \right.$$

Чтобы решения этой системы уравнений не выводили бы нас из множества неотрицательных целых чисел, есть всего лишь две возможности:

$$\textbf{а) } T_{-1}^{0} = T_{-1}^{-2} = 1, \quad T_{-1}^{-1} = 0$$
$$\textbf{б) } T_{-1}^{0} = T_{-1}^{-2} = 0, \quad T_{-1}^{-1} = 1$$

Если в качестве решения системы **18)**, **19)** взять случай **а)**, то, применяя выражение **2)** для величины $\mathbf{T_0^1=0}$, получим:

$$T_0^1 = T_{-1}^1 + T_{-1}^0 \qquad \textbf{20)}$$

Или:

$$0 = T_{-1}^1 + 1$$

И у величины $\mathbf{T_{-1}^1}$ есть лишь одна возможность:

$$T_{-1}^1 = -1$$

И это не неотрицательное целое число, а, значит, для решения уравнений **18)**, **19)** остаётся лишь одна возможность – **б)**.

Таким образом, с точки зрения допустимости “тетраэдрической” интерпретации и удовлетворения выражению 2), есть возможность существования ещё одного тетраэдра в системе тетраэдров, представленных строками таблицы на рисунке 6. Строка значений параметров, соответствующая этому тетраэдру, должна располагаться над верхней строкой таблицы (рис. 6) и иметь лишь одно отличное от нуля значение $\mathbf{T_{-1}^{-1}=1}$.

Заметим, что, в принципе, в поисках ответа на вопрос “откуда взялся этот “изначальный тетраэдр”, правило 2) ведёт нас к рассмотрению строки с n=-2.

Однако составить её из целых положительных чисел и нулей невозможно, а, потому, на сегодня, интерпретировать это как объект, имеющий структуру, не удастся. Кроме того, вариантов этой строки и, следовательно, всей вышележащей структуры существует много: есть симметричные и несимметричные заполнения, есть заполнения целыми числами, а есть – дробными. В дробных симметричных заполнениях есть красивый случай такого заполнения области над треугольником Паскаля, когда вершина этого треугольника (который сам Б.Паскаль называл арифметическим треугольником) является одновременно и вершиной перевёрнутого гармонического треугольника Лейбница, а, также, случай треугольника, вдоль ребра которого расположены возрастающие степени ½! Как бы там ни было, но все эти построения не входят в структуру арифметического треугольника, в структуру тетраэдров, а "изначальный тетраэдр", то есть строка с **n=-1** и состоящая из единицы и нулей, в эту структуру входит и может рассматриваться как ещё один тетраэдр в системе тетраэдров, причём, изначальный, исходный и элементарный! Этот новый обнаруженный тетраэдр, имеющий лишь один параметр и являющийся простейшим из тетраэдров, назовём **"элементарным тетраэдром"**.

Итак, на данном этапе, таблица тетраэдров выглядит так:

элементы T_n^k с различными k / различные значения n, различные тетраэдры	T_n^{-1}	T_n^{0}	T_n^{1}	T_n^{2}	T_n^{3}	T_n^{4}
n=-1 элементарный тетраэдр	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
n=0, нульмерный тетраэдр	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
n=1, одномерный тетраэдр	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**
n=2, двумерный тетраэдр	**1**	**3**	**3**	**1**	**0**	**0**
n=3, трёхмерный тетраэдр	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**	**0**
n=4, четырёхмерный тетраэдр	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**

Рис.7

Ну, вот, уже гораздо лучше! Теперь осталось разобраться с парой вопросов – и можно писать формулу! Вопросы такие: что это за величины с отрицательными значениями **n** и **k**? Это как понимать? И что с этим делать?

Но, вначале, вернёмся ещё раз к **“элементарному тетраэдру”**.

Конечно, такая “вопиющая” ситуация произошла из-за этого нового объекта – элементарного тетраэдра, который существует как сам по себе, так и присутствует (как следует из рис.7) в единственном экземпляре у любого тетраэдра. Напомню, что возможность и необходимость существования элементарного тетраэдра и ряда единиц $\mathbf{T_n^{-1}}$ нам даёт формула 2), которая связывает параметры тетраэдров разных размерностей. Применяя её непоследовательно, заранее считая, что у тетраэдров нет более элементарных структур, чем вершины, просто потому, что нам так кажется, что нам так “советуют” наши наглядные представления”, мы вынуждены были весь первый ряд значений ($\mathbf{T_n^0}$) таблицы тетраэдров “вводить руками”, не обращая внимания на то, что эти числа, хоть и согласуются с наглядными представлениями, но приходят в противоречие с правилом взаимосвязи элементов тетраэдров 2) и, с точки зрения его, просто необъяснимы! Вот это да! Пойдя на поводу у наглядных представлений, мы и не заметили, что вошли в противоречие со строгим принципом, связывающим элементы разных тетраэдров, так, что он, по какой-то необъяснимой причине, стал действовать в отношении любых параметров тетраэдров, кроме вершин! Исправить эту ситуацию помогло лишь аккуратное следование правилу 2) на основе имевшегося фрагмента таблицы тетраэдров. И, в результате, все числа таблицы тетраэдров получили строгое обоснование и, даже исходная строка (содержащая $\mathbf{T_{-1}^{-1}=1}$), которая, хоть и неизвестно, откуда берётся (то есть, какая строка её породила – вариантов тут много!), но, всё-таки, была установлена методом “редукции”, то есть, именно такая строка с n=-1 порождает именно такую таблицу тетраэдров на основе правила 2)!

Уместно сказать, что ни для какой другой таблицы универсальной структуры её правило образования не допускает никакого дополнительного элемента “к списку имеющихся”! В том числе, и для таблицы кубов! То есть, элементарным кубом является нульмерный куб состоящий из вершина куба и, элементарный куб, таким образом – это нульмерный объект, имеющий в своей структуре только нульмерный и только один параметр: $\mathbf{N_0^0=1}$.

То есть, если для кубов мы отойдём от наглядных представлений и начнём строить таблицу кубов на основе правила 1), то мы получим ту же самую таблицу кубов 1, что и на основе “наглядных представлений”!

Совсем другое дело получилось в случае тетраэдров! Оказалось, что нульмерный тетраэдр и вершина тетраэдра – далеко не одно и то же! Вершина тетраэдра – это нульмерный объект, а, вот, нульмерный тетраэдр – это объект, состоящий из вершины и элементарного тетраэдра, согласно рис. 7, и имеющий два ненулевых параметра: $\mathbf{T_0^{-1}=1}$ $\mathbf{T_0^{0}=1}$.

Это интересный объект – элементарный тетраэдр! Находясь в ряду параметра $\mathbf{T_n^{-1}}$, получается, что он должен также относиться к вершине тетраэдра, как вершина тетраэдра относится к ребру тетраэдра! А, находясь строкой выше нульмерного тетраэдра $\mathbf{T_0^{k}}$ (точки), представляемый строкой $\mathbf{T_{-1}^{k}}$, он должен также относиться к точке, как точка относится к отрезку! То есть, этот объект “меньше” точки! В том смысле “меньше”, что если бы он мог, то имел бы размерность меньшую, чем даже точка! То есть, он является более простым объектом даже по сравнению с точкой! Ну, это просто невозможно вообразить! Почему? – потому, что “микроскоп наглядного представления” не заглядывает глубже точек! Для него точка – это элементарный объект из которого всё собрано! Ничего более “мелкого” оно видеть не в состоянии! А, вот, формула 2) позволяет рассмотреть ситуацию глубже и “увидеть” там ещё более элементарный объект, чем даже точка – элементарный тетраэдр!

Этот объект примечателен тем, что, видимо, соединяясь с вершиной тетраэдра, он образует нульмерный тетраэдр и, поскольку, в каждом тетраэдре есть лишь один элементарный тетраэдр, то и нульмерный тетраэдр в любом тетраэдре может быть только один! То есть, возможно, вершины тетраэдра неравноправны! Может быть, есть одна, содержащая элементарный тетраэдр и являющаяся нульмерным тетраэдром! А остальные вершины нульмерными тетраэдрами, таким образом, не являются!

Заглядывая вперёд, скажу, что в дальнейшем оказалось, что существование элементарного тетраэдра диктуется не только правилом 2), но и всей остальной частью универсальной структуры. Таблица тетраэдров должна входить в неё именно в виде, содержащем элементарный тетраэдр! Насколько это будет убедительно? – Настолько же, насколько в ряду чисел **1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128…**, скажем, на пятой позиции стоит число **16**, а не, к примеру, **15**, иначе, вся гармония нарушится!

Ну, вот, а теперь займёмся “парой вопросов”.

Сначала разберёмся с отрицательным значением **k (k=-1)**. Как это получилось и что с этим делать?

Что означает число **k**? – это просто (с небольшой поправкой) номер параметра! У вершин **k=0**, у рёбер **k=1** и так далее. Мы, ведь, ничего не знали о новом параметре у тетраэдра, когда нумеровали параметры, вот и начали нумерацию, присвоив вершине номер “нуль”. И что было делать, когда у тетраэдра обнаружился параметр, который оказался ещё “первее, чем вершина?” – ну, конечно, присвоить ему номер, который предваряет номер вершины… А какой номер идёт перед номером вершины – нулём? – “минус единица!” Вот она и досталась в качестве номера столбцу элементарного тетраэдра! И что с этим можно поделать? – да просто сменить нумерацию – и всё! Например, переобозначить:

1. $\mathbf{T_n^{-1} \to T_n^{0},\ T_n^{0} \to T_n^{1},\ T_n^{1} \to T_n^{2}}$ и так далее.

Или даже

2. $\mathbf{T_n^{-1} \to T_n^{1},\ T_n^{0} \to T_n^{2},\ T_n^{1} \to T_n^{3}}$ и так далее.

С точки зрения возможности описания всех чисел таблицы единой формулой, остановимся на первом варианте.

Далее, зададимся вопросом, что делать с отрицательным значением **k**?

Снова задумаемся и попытаемся понять, почему это произошло?

Дело в том, что при построении таблицы тетраэдров мы посчитали вершину тетраэдра – точку – элементарным тетраэдром (то есть, простейшим, первичным, исходным) и, начав с неё ряд тетраэдров, присвоили ей значение параметра **n** равное нулю. Мы не говорим, что означает величина **n**: ни то, что это размерность пространства, в котором расположен тетраэдр, ни даже то, что это имеет какое-то отношение к размерности самого тетраэдра мы не говорим, ведь, никакой необходимости вводить такие ограничения пока нет. Пока достаточно того, что величина **n** нумерует тетраэдры, также как величина **k** нумерует параметры тетраэдра! Вот мы и начали нумеровать тетраэдры с вершины, которая на тот момент казалась нам самым простым тетраэдром! И присвоили ей номер “нуль”. Вот что мы сделали. А что мы можем сделать теперь, когда обнаружили ещё более элементарный тетраэдр? – Конечно, сместить нумерацию с учётом этого важного факта! С учётом интересов описания всех чисел таблицы тетраэдров единой формулой, смену нумерации произведём следующим образом:

$$\mathbf{T_{-1}^k \rightarrow T_0^k,\ \ T_0^k \rightarrow T_1^k,\ \ T_1^k \rightarrow T_2^k} \text{ и так далее.}$$

В результате всех переобозначений, таблица тетраэдров приобретёт следующий вид:

элементы T_n^k с различными k / различные значения n, различные тетраэдры	T_n^0	T_n^1	T_n^2	T_n^3	T_n^4	T_n^5
n=0 элементарный тетраэдр	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
n=1, нульмерный тетраэдр	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
n=2, одномерный тетраэдр	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**
n=3, двумерный тетраэдр	**1**	**3**	**3**	**1**	**0**	**0**
n=4, трёхмерный тетраэдр	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**	**0**
n=5, четырёхмерный тетраэдр	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**

Рис.8

Дописав правила ограничения-схождения, получим, в результате, таблицу 3.

А это уже “прямым текстом” треугольник Паскаля, формулу для элементов которого мы знаем уже несколько сот лет, благодаря усилиям сэра И.Ньютона!

Вот она:

$$T_n^k = n! / (k!(n-k)!) \qquad 19)$$

Вот, примерно так была достигнута первая цель, и теперь стало возможным "влёт сказать всё" о тетраэдре любой размерности!

Вскоре, созвонились со Станиславой:

- Ты говорил что-то о важности таблицы для треугольников, не мог бы ты мне об этом рассказать?

- Конечно, с удовольствием!

И, вот, встречаемся, я рассказываю – и всё встаёт на свои места, понимание достигнуто. А, вскоре, Станислава сделала следующее своё потрясающее открытие! Но, обо всём по порядку.

Формула для таблицы кубов.

Итак, построены таблицы кубов и тетраэдров, написана формула для таблицы тетраэдров, формула для таблицы кубов должна быть где-то рядом…

Попробуем её отыскать. Предположим, что таблица кубов есть, по существу, несколько усложнённая таблица тетраэдров, следовательно, выражение для любого элемента таблицы кубов – это, вероятно, несколько усложнённое выражение для любого элемента таблицы тетраэдров! А в чём это усложнение может заключаться? – Первым делом, надо попробовать добавить дополнительный множитель к величине $\mathbf{T_n^k}$, описывающей элементы таблицы тетраэдров. Поскольку элементы таблиц различаются только величинами **n** и **k**, то и этот дополнительный множитель должен зависеть от них. То есть, надо попытаться поискать выражение для элементов таблицы кубов в виде:

$$N_n^k = f(n,k) \bullet T_n^k \qquad 20)$$

где **f(n,k)** – величина, зависящая от значений **n** и **k**. Её можно попытаться поискать в виде функции от этих величин.

Сравнивая первые столбцы ($\mathbf{N_n^0}$, $\mathbf{T_n^0}$) таблиц кубов и тетраэдров, понимаем, что функция **f(n,k)** должна содержать величину $\mathbf{2^n}$.

А как в функцию **f(n,k)** должна входить величина **k**? Для этого выберем в таблице кубов 2 любую строку и разделим числа в строке на величину $\mathbf{2^n \bullet T_n^k}$. Тогда получим ряд значений:

1, ½, ¼, 1/8, 1/16, 1/32, …

Что можно записать так:

$$½^0, ½^1, ½^2, ½^3, ½^4, ½^5, \ldots$$

что есть ни что иное, как $\mathbf{2^{-x}}$, где **x** – целое неотрицательное число. Поскольку числа в ячейках одной строки отличаются только параметром **k**, то и величина **x** может зависеть только от него. Нетрудно видеть, что в данном конкретном случае величина **x** в точности совпадает с **k**. Следовательно, величина **f(n,k)** будет равна:

$$f(n,k) = 2^{(n-k)}$$

Таким образом, окончательно формула для таблицы кубов будет выглядеть так:

$$N_n^k = 2^{(n-k)} \cdot T_n^k \qquad 21)$$

$$N_n^k = 2^{(n-k)} \cdot n! \,/\, (k!(n-k)!) \qquad 22)$$

Можно проверить и убедиться, что формула **22)**, действительно, в точности описывает таблицу кубов!

Вот, примерно так была достигнута и вторая цель! И стало возможным “мгновенно сказать всё” также и о кубе любой размерности!

Ещё раз об элементарном тетраэдре.

Поговорим ещё раз об элементарном тетраэдре. Объект этот присутствует только в таблице тетраэдров, его нет в других таблицах, в том числе, нет его и в таблице кубов! То есть, нет куба, более элементарного, чем нульмерный куб – вершина! Спрашивается, что бы это значило? Зачем тетраэдру этот “лишний” элемент? Не говорит ли это о том, что элементарный тетраэдр выполняет роль, выходящую за пределы таблицы тетраэдров и распространяющуюся на всю универсальную структуру n-мерных объектов?

В дальнейшем мы увидим, как, благодаря ряду единиц элементарного тетраэдра, таблицы всех n-мерных объектов удивительным образом оказываются согласованными между собой!

Однако существование элементарного тетраэдра вносит кардинальное изменение и в понимание, собственно, самого этого объекта – n-мерного тетраэдра!

Помочь нам это осознать может сама таблица тетраэдров, а, точнее, надписи над и под числами в ней! Эти надписи придумала делать Станислава, когда строила таблицу n-мерных кубов. Это уникальные правила, содержащие информацию о том, что чем ограничено и что из чего исходит. Легко видеть тенденцию изменения чисел в этих правилах: в нижних правилах при вертикальном смещении изменений нет, а при горизонтальном – определённое число меняется на единицу, на два, на три и так далее, в зависимости от вида таблицы (на 1 для тетраэдров, на 2- для кубов, на 3- для таблицы с s=3 и т.д.). А в верхних правилах изменение чисел происходит всегда на единицу при переходе к соседней клетке как в вертикальном направлении, так и в горизонтальном. Организованы все эти правила по одному и тому же принципу: что-то какие-то структуры ограничивает, а что-то откуда-то исходит.

Можно видеть, что такие правила написаны для структур, начиная с рёбер, и их нет для вершин и элементарных тетраэдров. Так почему, спрашивается, не распространить эти правила и на эти структуры, почему эти правила, справедливые для других структур n-мерного тетраэдра, не должны быть справедливы для вершин и элементарных тетраэдров? Разве они не являются таким же структурными элементами тетраэдров, как и все другие? Но, пойдём дальше и, предчувствуя глубокий универсализм этих правил, спросим себя: “А отсутствие чего-либо разве не должно подчиняться этим правилам, как и всё остальное?” – конечно, разумно предположить, что должно подчиняться! Так что, распространим эти правила также и на столбцы нулей, которые находятся слева от столбца элементарного тетраэдра. Эти столбцы обозначим словом “ничто”.

Все эти мысли приводят нас к таблице тетраэдров 4.

Если предположить, что эта таблица отражает природу вещей в нашем мире, то осознание её закономерностей окажется судьбоносным для нашего понимания устройства мира! Действительно, почему бы не поиграть в такую игру: пусть таблица тетраэдров представляет “мироздание”, ну или какую-то его часть. Что, в таком случае, из этого следует?

Согласно правилам в нижней части ячеек, структуры слева (или их отсутствие) ограничивают элементы данного ряда. Так вот, из таблицы 4 следует, что в плане ограничительных свойств есть чёткая иерархия: ничто ограничивает и ничто, и элементарные тетраэдры, те ограничивают вершины, вершины ограничивают рёбра, рёбра ограничивают грани и так далее.

В смысле «исхождения» тоже всё структурировано: из ничто исходит и ничто, и элементарные тетраэдры, из элементарного тетраэдра исходят вершины, из вершин исходят рёбра, из рёбер исходят грани и так далее. Конечно, разумно было бы считать, что за фразой “из ничто исходит ничто” ничего не стоит и это просто всё то же “ничто”. Но, такие записи – это просто продолжение правил влево от структур тетраэдров с сохранением их формы, чтобы убедиться, что и в этой области эти правила работают!

А теперь опять вернёмся к элементарному тетраэдру.

Глядя на таблицу 4, можно заметить, что элементарный тетраэдр никогда не представлен “кучей”, а только поодиночке: на один n-мерный тетраэдр есть лишь один элементарный! Спрашивается, а этот объект, вообще, обладает свойством счётности или нет? То есть, можно ли из элементарных тетраэдров собрать “кучу” или нет? Что-то наша “модель мироздания” – таблица тетраэдров – затрудняется дать ответ на такой вопрос. И даже правила вроде “из 1 ничто исходит 5 элементарных тетраэдров” не прольёт свет, так как, если этот элемент не счётен, то тогда ситуация та же что и с нулём: 5 элементарных тетраэдров = 1 элементарному тетраэдру = n элементарным тетраэдрам = элементарному тетраэдру.

Также на несчётность этого элемента указывает и отсутствие образа для него. Если он является структурной частью нульмерного тетраэдра, то точка, вроде бы, подошла бы ему как образ. Однако о чём говорят надписи в ряду вершин? Ну, рассмотрим, например, элемент $\mathbf{T_4^1}$**,** соответствующий трёхмерному тетраэдру. Там есть два правила:

“**Из 1 элементарного тетраэдра исходит 4вершины” и**

“1 вершина ограничена 1 элементарным тетраэдром”.

У него четыре вершины и один элементарный тетраэдр, каждая вершина им ограничена. То есть, один элементарный тетраэдр ограничивает весь тетраэдр, все его четыре вершины!

Но, как может это сделать точка, ведь, между вершинами - расстояние?! То есть, с этой точки зрения, элементарный тетраэдр – не точечный объект! А, ведь, ранее, мы связали элементарный тетраэдр с одной из вершин тетраэдра, выделив её, таким образом, из других! Можно было бы придать этому факту даже некий романтический смысл: “это как раз та вершина, из которой, как цветок, возникает тетраэдр”! А, вот, в свете новой информации это оказалось не так!

Чем ещё примечателен элементарный тетраэдр, кроме противоречивости своих свойств и невообразимости?

Обратим внимание на то, что, в целом, между объектами, определяемыми одинаковыми значениями **n** и **k**, существует аналогия, но не более того. Скажем, для таблицы тетраэдров, объект со значением **k=2** – ребро – не то же самое, что объект со значением **n=2** – одномерный тетраэдр! Ведь, одномерный тетраэдр состоит из рёбер и вершин, а ребро состоит только из ребра, вершины же характеризуются другим значением **k** и находятся в другом столбце! А, вот, элементарный тетраэдр как тетраэдр, то есть, объект с **n=0** тождественен элементарному тетраэдру как элементу тетраэдра с **k=0**! То же самое можно сказать и об исходных элементах всех других структур, в частности, в структуре кубов, нульмерный куб тождественен вершине куба!

Что мы можем понять о мире, глядя на его “модель” – таблицу тетраэдров 4?
Первое, это то, что слева от структур тетраэдров нет ничего – одни нули. А, ведь, содержание ячеек слева ограничивает содержание ячеек справа! О чём это говорит? – Это говорит о том, что предельным и окончательным ограничителем в нашем мире является ничто, пустота, что всё, в конце концов, погружено в пустоту! И не только в трёхмерном мире, но и в мире любой другой размерности – тоже!

Второе – это то, что между пустотой и структурами тетраэдров расположен некий “неуловимый” элемент – элементарный тетраэдр, который у любого тетраэдра существует в единственном числе и не поддаётся наглядному представлению, но является структурой тетраэдра. Он имеет то свойство, что “в одиночку” способен ограничивать все вершины тетраэдра. Из-за этого можно считать, что тетраэдр как будто “погружен” в элементарный тетраэдр! Однако наше отнесение элементарного тетраэдра изначально к точечным объектам – не ошибка, а разумное предположение на основании имевшихся о нём на тот момент сведений!

С другой стороны, если элементарный тетраэдр – протяжённый объект, то почему он не изобразим?

Изобразимость предполагает, что что-то имеет ограниченную, конечную размерность. Например, ребро тетраэдра, имеет размерность единица и изобразимо в виде отрезка линии. Совсем не так обстоит дело с элементарным тетраэдром. Он может ограничивать любое количество вершин тетраэдра любой размерности, а, значит, должен иметь **бесконечную (!!!) размерность**!
Вот почему его нельзя изобразить! В том числе и поэтому мы не говорим о пространствах, в которые могут быть помещены тетраэдры! Ведь, не вся часть n-мерного тетраэдра помещается в n-мерное пространство! И, конечно, на этом примере видна большая разница между геометрическим (образным) и аналитическим (табличным) тетраэдрами! У геометрического тетраэдра просто нет такой проблемы, однако, как скоро увидим, и возможности у него более скромные!

С другой стороны, “пустота”, “ничто”, “нули”, будучи расположенными в таблице слева от единиц, представляющих элементарный тетраэдр, ограничивают сам элементарный тетраэдр! Но, ведь, он – бесконечномерен! А, раз так, то и по этой причине мы не можем связать эти нули с каким-то определённым пространством, то есть не ограничиваем качества этой пустоты! Чтобы ограничить элементарный тетраэдр, нужна бесконечномерная пустота! То есть, это пустота, в которую помещается и элементарный тетраэдр, и все представляемые элементы каждого конкретного тетраэдра! Значит, существование таблицы тетраэдров и элементарного тетраэдра указывает на существование каким-то образом абсолютной пустоты, то есть, такой пустоты, в которую можно поместить объект любой размерности!

Таким образом, получается удивительное дело! Любой тетраэдр содержит бесконечномерный элемент – элементарный тетраэдр – который в рисунке тетраэдра отсутствует, так как является бесконечномерным! И пустота – пространство, в которое помещён будет любой изображённый тетраэдр, тоже не та, что в таблице слева от конкретного n-мерного тетраэдра! На рисунке и пустота, и конкретный тетраэдр имеют конечную размерность, а в таблице – не имеют! Ведь, любой n-мерный тетраэдр имеет в своей структуре элементарный тетраэдр, который бесконечномерен! А, вот, таблицы кубов и других объектов такой особенности не имеют! Там мы могли бы связать нульмерный куб с нульмерным пространством, одномерный куб – с одномерным пространством и так далее. Но, без особой надобности мы этого делать, конечно, не будем!

Таким образом, элементарный тетраэдр является причиной существования больших различий между нарисованным и табличным n-мерными тетраэдрами!

Необходимое условие существования элементарного тетраэдра.

К вопросу о существовании элементарного тетраэдра можно подойти ещё и следующим образом.

При переходе от объекта с размерностью **(n–1)** к объекту с размерностью **n**, каждый элемент объекта размерности **(n–1)** даёт в объекте размерности **n** один элемент, следующий за ним. То есть, вершина даст ребро, ребро приведет к появлению грани, грань превратится в трёхмерный объём, и так далее. Следовательно, если мы добавили в таблицу тетраэдров ряд единиц, который представляет неизобразимый элемент тетраэдра, то при переходах к тетраэдру большей размерности этот элемент, согласно правилу, должен давать следующий за ним элемент – вершину! Поскольку элементарный тетраэдр неизобразим, а вершина изобразима, то при переходе к тетраэдру большей размерности должна, как бы ниоткуда, появляться ещё одна вершина тетраэдра! И, как ни странно, она действительно, появляется! У одномерного тетраэдра –

отрезка – две вершины, а у двумерного тетраэдра – треугольника – три: две – это вершины одномерного тетраэдра, а одна вершина – “непонятной природы”, что вынуждает придумывать специальное правило построения тетраэдра на единицу большей размерности с проведением перпендикуляра и отысканием на нём специальной точки, обоснованность существования которой вызывает законный вопрос: “А с чего это вдруг и откуда взялась эта новая точка?” Так вот, с признанием элементарного тетраэдра частью любого тетраэдра, всё встаёт на свои места и каждый элемент в тетраэдре размерности n получает простое и естественное объяснение: или это есть просто элемент **(n-1)**-мерного тетраэдра, или это элемент, произошедший из какого-то элемента **(n-1)**-мерного тетраэдра при распространении последнего в следующее измерение! И – никаких элементов непонятного происхождения!

Такой естественности связи элементов двух объектов соседних размерностей нет уже ни у каких других объектов, даже у кубов! Действительно, из каких элементов построен **n**-мерный куб? – Из элементов **(n-1)**-мерного куба, из элементов его образа при параллельном переносе в следующее измерение и из элементов, произошедших из элементов **(n-1)**-мерного куба при распространении его в следующее измерение! Конечно, по сравнению с операцией, оставляющей всё как есть, появление образа **(n-1)**-мерного куба в n-мерном пространстве выглядит необоснованной виртуализацией! Вот почему складывается впечатление, что истинная природа мироздания, вероятнее всего, близка к структуре тетраэдров, а не к структуре кубов (или последующих объектов)!

Множество таблиц. Универсальная структура n-мерноподобных объектов.

Итак, у нас было две таблицы – для кубов и для тетраэдров – и четыре формулы: две (1), 2)) - задающие структуры всех кубов и всех тетраэдров и две (19), 22)) – описывающие их параметры. Меня это вполне устраивало. Но, не Станиславу! Через некоторое время она меня опять удивила:

- Олег, а, ведь, существует не две, а много структур! И таблиц – тоже много! Ведь, как задаётся структура треугольников (тетраэдров)? – правилом треугольника (2)):

$$\mathbf{T_n^{\,k} = T_{n-1}^{\,k} + T_{n-1}^{\,k-1}} \qquad \mathbf{2)}$$

А как задаётся структура кубов? – правилом куба (1)):

$$\mathbf{N_n^{\,k} = 2 \cdot N_{n-1}^{\,k} + N_{n-1}^{\,k-1}} \qquad \mathbf{1)}$$

Так, почему бы теперь не рассмотреть этот процесс далее? Мы можем написать:

$$\mathbf{U_{sn}^{\ k} = S \cdot U_{s(n-1)}^{\ k} + U_{s(n-1)}^{\ k-1}} \qquad \mathbf{23)}$$

Где **S** – натуральное число (**S=1,2,3…**)

При **S=1** получится структура тетраэдров, а при **S=2** – структура кубов, а при других значениях **S** получатся ещё какие-то структуры!

Браво, Станислава! Вот это, поистине, выдающийся шаг, ведь, формула 23) задаёт сразу и все тетраэдры, и все кубы, и ещё много других объектов! И всё это, таким образом, образует целую многомерную вселенную, которая задаётся одной-единственной формулой 23)!

Теперь встаёт вопрос о том, как написать формулу для параметров структур, задаваемых формулой 23)?

Посмотрим на формулы 1), 22), а потом – на формулу 23). Понятно, что, если в формуле 22) заменить число 2 на S, то получим искомую формулу:

$$\mathbf{U_{sn}^{\ k} = S^{(n-k)} \cdot T_n^{\ k}} \qquad \mathbf{24)}$$

$$\mathbf{U_{sn}^{\ k} = S^{(n-k)} \cdot n! \,/\, (k!(n-k)!)} \qquad \mathbf{25)}$$

где **n = 0, 1, 2, 3…**

k = 0, 1, 2, 3…

s=S= 1, 2, 3…

Таким образом, величины $\mathbf{U_{sn}^{\ k}}$ представляют собой количества параметров у **n**-мерных объектов, образующих некую глобальную многомерную структуру **n**-мерных объектов! Значение величины **S** определяет вид таких объектов. При **S=1** это будут “тетраэдры”, при **S=2** – “кубы”, а при других значениях **S** – ещё какие-то объекты. Кавычки появляются из-за того, что эти объекты в рамках универсальной структуры **U** могут соответствовать не только тетраэдрам и кубам, но, также, и неправильным треугольникам и четырёхугольникам, продолженным стандартными или другими способами в пространства других измерений. А, возможно, ещё каким-то объектам. Здесь интерпретации уже отходят на второй план.

Таблицы **N** и **T** создавались как отражения свойств конкретных геометрических объектов – тетраэдров и кубов. И их строки можно понимать как наборы параметров именно этих объектов. И называя таблицу **N** таблицей кубов, а таблицу **T** таблицей тетраэдров, мы подразумевали, что именно эти объекты в них и описываются. Именно поэтому возник вопрос о том, существует ли и как выглядит элементарный тетраэдр? Да и название его красноречиво говорит о

том, как именно мы понимаем объекты, которые представляют строки этой таблицы. Поэтому в названии таблиц **N** и **T** кавычек не было!

Также, обратим внимание на то, что из выражения 24) следует, что существует простая связь количества параметра **k** у **n**-мерного объекта со значением **S**, с количеством параметра **k**, но уже у “**n**-мерного тетраэдра”! **То есть, оказывается, что существует простая связь между числом, заполняющим ячейку n-k в любой таблице с числом, заполняющим ячейку n-k в таблице “тетраэдров”!** А это значит, что мы можем сказать, например, сколько граней у семимерного куба ничего вообще не зная о кубах, а имея перед собой лишь таблицу тетраэдров – треугольник Паскаля (или формулу 19), которая его описывает) и формулу 24)! Но, надо помнить, что из-за существования элементарного тетраэдра, количество граней у семимерного куба будет выражаться не через количество граней у семимерного тетраэдра, а через количество рёбер у шестимерного тетраэдра! Также, к примеру, оказывается, что количество рёбер у куба обыкновенного (то есть, трёхмерного), в силу формулы 24), связано с количеством вершин обычного треугольника, а именно, в $\mathbf{S^{(n-k)}=2^{(3-1)}=4}$ раз больше!

Заметим, также, что формула 24) выявляет ту самую надструктурную роль элементарного тетраэдра, о которой недавно говорилось. Действительно, убери элементарный тетраэдр – и формула 24), конечно, останется в отношении структур с **S>1**, но величина $\mathbf{T_n^k}$ будет описывать не элементы структуры $\mathbf{U_1}$, а что-то другое. Или придётся ввести искусственное ограничение и для структуры $\mathbf{U_1}$ начинать отсчёт значений **n** и **k** не с нуля, а с единицы! С чего это вдруг структура $\mathbf{U_1}$ должна иметь такие “урезанные” права по сравнению с другими? Почему она, таким образом, должна нарушить целостность описания универсальной структуры **U** и, к тому же, придти в противоречие со структурообразующим правилом 23)? А с элементарным тетраэдром всё получается просто и красиво!

Построим таблицы для первых четырёх значений величины **S** и попробуем их сравнить.

Что можно сказать, глядя на таблицы 5,6, а, также, исследуя выражения 23), 24), 25)?

Первое, что хочется отметить, это то, что первый ряд в первой структуре – “тетраэдров” – особенный, так как он состоит из одних единиц, не проявляющихся в виде какого-то элемента у геометрического тетраэдра! Однако, с точки зрения формул 24), 25), он не отличается от любого другого ряда!

Точно также и вся структура “тетраэдров” ($\mathbf{U_1}$), с точки зрения формул 24), 25) совершенно логична – таково правило построения структур $\mathbf{U_s}$ 23), таковы формулы 24), 25) – следствия этого правила, таков мир!

Также, из формул 24), 25) следует, что в структуре “тетраэдров”, в ячейках первого ряда должны стоять именно единицы, а не ряд натуральных чисел, которому сопоставлено количество вершин у n-мерного тетраэдра. То есть, то, что обозначено как “элементарный тетраэдр”, как бы затруднительно нам ни было себе это представить, имеет основание в идейном аналитическом плане, очищенном от влияния наглядных образов и интерпретаций!

И, также, из правила построения структур $\mathbf{U_s}$, 23) и его следствий – формул 24), 25) следует, что ничего похожего у других структур наблюдаться не может!* То есть, если мы, например, к таблице “кубов” слева “пририсуем” ряд единиц, то эта структура уже не будет подчиняться формулам 23), 24), 25), а будет сама по себе, вне универсальной структуры! И, в силу этого обстоятельства, возникла ситуация, что одному и тому же значению **n** соответствуют кубы и тетраэдры разной размерности!

А о геометрической интерпретации объектов структур с **S>2** вообще пока говорить не приходится: ну, не понятно пока какой образ можно было бы этим объектам сопоставить и возможна ли вообще по отношению к ним геометрическая интерпретация? Можно только предположить, что эти структуры содержат количества параметров объектов, которые природой предусмотрены, что эти объекты строятся в соответствии с правилом 23) и продолжают себя в область всё возрастающих значений **n**, которые, вовсе не очевидно, что имеют отношение к идее размерности (хотя, изначально, мы могли так считать, но, лишь в силу автоматизма и сейчас, выражаясь корректно, лишь не исключаем такую возможность интерпретации величины **n**).

Далее, как уже было замечено, любое число в любой структуре – это есть соответствующее число из самой первой структуры – таблицы тетраэдров, умноженное на какую-то степень натурального числа. И, таким образом, любая таблица универсальной структуры $\mathbf{U_s}$ представляет собой наложение с произведением таблицы $\mathbf{S^{(n-k)}}$ на таблицу "тетраэдров" $\mathbf{U_{1n}}^{\mathbf{k}}$.

Далее, заметим, что из формулы 25) следует, что первый ряд любой таблицы – это есть $\mathbf{S^n}$:

$$\mathbf{U_{sn}}^{\mathbf{0}} = \mathbf{S^n} \qquad \mathbf{26)}$$

И, вот, мы подошли к одному интересному свойству структур, которое выявляет своеобразную надструктурную связь между ними и даёт ответ на вопрос о том, в каком виде должна входить в универсальную структуру **U** структура тетраэдров $\mathbf{U_1}$?

Посмотрим на таблицы 5), 6) и найдём сумму чисел в строке какой-либо структуры. Ну, например, суммируем числа в пятой строке таблицы тетраэдров. Получим число 256. Но, это число есть первое число в пятой строке следующей структуры! И так – для всех строк всех структур получается! Сумма чисел в строке какой-либо структуры есть первое число в той же строке следующей структуры:

$$\mathbf{U_{(s+1)n}}^{\mathbf{0}} = \sum^{n} \mathbf{U_{sn}}^{\mathbf{k}}{}_{\mathbf{k=0}} \qquad \mathbf{27)}$$

где **s = 1, 2, 3, …**
n = 0, 1, 2, 3, …
k = 0, 1, 2, 3, …

Вот, также, и из этого удивительного свойства, демонстрирующего связь одной структуры с другой, следует, что таблица "тетраэдров" должна содержать слева ряд единиц и совпадать с треугольником Паскаля! Иначе, никакой "глобальной гармонии" не будет! То есть, то, что названо элементарным тетраэдром, пусть не в образном, геометрическом, но в идейном, аналитическом (наиболее весомом!) смысле, всё-таки, существует!

*Что находится слева от структур U_s, и почему наверху треугольника Паскаля стоит единица?

Если, в отношении того, что стоит справа от структур $\mathbf{U_s}$ существует ясность – это нули, символизирующие отсутствие у объекта с числом **n** элементов с величиной **k>n** – то в отношение того, что находится слева от структур $\mathbf{U_s}$ такой изначальной ясности нет и вопрос требует рассмотрения.

Изначально, отвечая на вопрос "что находится слева от структур $\mathbf{U_s}$", мы должны опираться на формулу 23), ведь, именно она является задающей структуру формулой.

Повторюсь, что "безродным числом" для всех структур является величина $\mathbf{U_{s0}^0}$, которая везде выбрана в виде числа 1. Правило 23) бессильно обосновать этот выбор, но, в случаях **s=**1 и **s=2** такой выбор приводит к яркой геометрической интерпретации чисел таблиц $\mathbf{U_1}$ и $\mathbf{U_2}$, давая возможность соотнести их с количеством параметров у тетраэдров и кубов.

Но, этот вопрос выбора значения для величины $\mathbf{U_{s0}^0}$ не является такой уж глубоко принципиальной проблемой! Ведь, какое бы число $\mathbf{U_{s0}^0}$ мы не выбрали для первой ячейки любой из таблиц, и даже не целое любое действительное число **а**, все остальные числа и в этой таблице, и в других определятся автоматически согласно правилу 23) и его следствию – формуле 24) – они просто получат дополнительный множитель **а**. То есть, все числа во всех таблицах будут умножены на **а** и ничего нового этот выбор нам не принесёт!

Такой ответ является, конечно, ответом и на такой актуальным вопрос, как "почему в треугольнике Паскаля на вершине стоит единица – единственное число в треугольнике не получаемое "прямым путём" из формулы треугольника 2) ввиду отсутствия вышележащих строк"!

А теперь обратимся к тому, что в таблицах структур $\mathbf{U_s}$ может находиться слева от первого ряда любой из структур? Могут ли там оказаться ненулевые числа!

Этот вопрос мы рассмотрели уже в отношении структуры "тетраэдров" $\mathbf{U_1}$ и, открыв, пользуясь формулой 2), принципиальную возможность и необходимость существования в таблице этой структуры ещё одного ряда единиц, доказали, что никаких других ненулевых элементов слева от этой структуры в её таблице не существует!

Отвечая на этот вопрос в отношение других структур $\mathbf{U_s}$, мы будем использовать выражение 23) как обобщение формулы 2), которое мы не будем применять для рассмотрения предшественников чисел $\mathbf{U_{s0}^{0}}$ – самых верхних чисел в таблицах структур $\mathbf{U_s}$, так как такое рассмотрение привело бы нас к рассмотрению области не слева от структур $\mathbf{U_s}$, а над структурами (что интересно и о чём в отношении треугольника Паскаля уже здесь упоминалось). Нас же, в данный момент, интересует только вопрос о возможности ненулевых чисел в ячейках слева от какой-либо структуры $\mathbf{U_s}$!

Поэтому, отвечая на этот вопрос, рассмотрим “предшественников” любого числа $\mathbf{U_{sn}^{0}}$, кроме “предшественников” числа $\mathbf{U_{s0}^{0}}$, используя правило 23). Наша цель на ближайшее время – понять что-то о значениях чисел из первого ряда слева от некоторой структуры $\mathbf{U_s}$ вообще и от её первого ряда $\mathbf{U_s^{0}}$ в частности, то есть, о числах ряда $\mathbf{U_s^{-1}}$. Согласно правилу 23), напишем:

$$\mathbf{U_{sn}^{0} = S \cdot U_{s(n-1)}^{0} + U_{s(n-1)}^{-1}} \qquad \mathbf{28)}$$

где $\mathbf{s = 1, 2, 3, \ldots}$
$\mathbf{n = 1, 2, 3, \ldots}$

Далее, будем использовать следствие правила 23) – формулу 25). Представим по ней величины $\mathbf{U_{sn}^{0}}$ и $\mathbf{U_{s(n-1)}^{0}}$:

$$\mathbf{U_{sn}^{0} = S^{(n-0)} \cdot n! / (0!(n-0)!)} \qquad \mathbf{29)}$$

$$\mathbf{U_{sn}^{0} = S^{n}} \qquad \mathbf{30)}$$

$$\mathbf{U_{s(n-1)}^{0} = S^{((n-0)-0)} \cdot (n-1)! / (0!((n-1)-0)!)} \qquad \mathbf{31)}$$

$$\mathbf{U_{s(n-1)}^{0} = S^{(n-1)}} \qquad \mathbf{32)}$$

И, подставляя в формулу 28), получим:

$$\mathbf{S^{n} = S \cdot S^{(n-1)} + U_{s(n-1)}^{-1}} \qquad \mathbf{33)}$$

Откуда следует:

$$\mathbf{U_{s(n-1)}^{-1} = 0} \qquad \mathbf{34)}$$

Но, ведь, $\mathbf{n}$ – произвольно и меняется, возрастая, начиная с единицы. Следовательно, любое число в первом ряду слева от ряда $\mathbf{U_s^{0}}$, в том числе, и число $\mathbf{U_{s0}^{0}}$, равно нулю!

Также, можно показать, что в ряду $\mathbf{U_{s(n-1)}^{-2}}$ тоже - одни нули:

$$U_{sn}^{-1} = U_{s(n-1)}^{-1} + U_{s(n-1)}^{-2} \qquad 35)$$

Или:

$$U_{s(n-1)}^{-2} = U_{sn}^{-1} - U_{s(n-1)}^{-1} \qquad 36)$$

$$U_{s(n-1)}^{-2} = 0 – 0 = 0 \qquad 37)$$

Аналогично, $U_{s(n-1)}^{-3} = 0$, $U_{s(n-1)}^{-4} = 0$ и так далее. То есть, в таблице любой структуры слева от неё всегда находятся одни нули!

Заключение.

Хотелось бы подытожить сказанное и предложить некоторый взгляд на освещаемые здесь вопросы. Причина тому в том, что раскрытие здесь некоторых вопросов может создавать противоречивое представление о предмете обсуждения или создавать вокруг обсуждаемого ненужный сиюминутный ажиотаж, отодвигая на задний план главный результат освещаемого здесь исследования – универсальную структуру n-мерноподобных объектов.

Хотелось бы донести до читателя то отношение к раскрываемым вопросам, которое, как мне кажется, отражает наиболее естественное, в данном контексте, положение каждого математического объекта или явления в порядке вещей нарисованной здесь картины.

С чего хотелось бы начать? Хотелось бы обратить внимание на то, что в процессе изложения материала, по мере развития основной идеи, появляется новый способ представления кубов и тетраэдров. Вначале эти объекты понимаются только как **геометрические образы, продолжаемые стандартными способами в n-мерные пространства.** А, далее, с появлением таблиц, возникает возможность воспринимать тетраэдры и кубы только как математические объекты, представляемые строкой соответствующей структуры, где величина **n** есть параметр, характеризующий этот объект, а не величина, обозначающая размерность объекта или что-то ещё конкретное! Но, при этом, названия этих объектов остались теми же, “геометрическими”: таблица тетраэдров – **T**, таблица кубов – **N**, а также структуры $\mathbf{U_1}$ и $\mathbf{U_2}$ универсальной структуры **U** сохранили этот “геометрический след”. Это разные точки зрения на тетраэдры и кубы, они различны и по своей форме, и по “ёмкости” – вторая точка зрения, аналитическая, оказалась более ёмкой, вместительной! Она, конечно, вмещает не только кубы и тетраэдры и не только геометрические объекты! В результате, возник и стал актуальным вопрос о том, существует ли и как выглядит “элементарный тетраэдр”?

Мне бы хотелось оформить здесь следующий взгляд на этот и другие вопросы, представляющиеся на сегодня мне актуальными:

“Как геометрический образ или даже как геометрический объект, подобный наглядно изображаемым, (наподобие 4-хмерного тетраэдра) элементарный тетраэдр не существует. Геометрический образ существует для нульмерного тетраэдра – точка, для одномерного тетраэдра – отрезок, для двумерного тетраэдра – треугольник, для трёхмерного тетраэдра – тетраэдр. Аналогично и для кубов. Идея тетраэдра может быть продолжена в направлении большей размерности описанным здесь стандартным способом. Однако этот способ, как мне представляется, невозможно применить к какому-либо изображаемому объекту и получить нульмерный тетраэдр, с тем чтобы отыскать таким “обратным” способом подходящий образ для элементарного тетраэдра.

Таблица тетраэдров, построенная только на основе геометрического представления о тетраэдре не содержит, таким образом, строки и столбца, относящихся к элементарному тетраэдру. Не существует какого-либо иного обоснования числам, заполняющим её первый столбец (представляющим количество вершин тетраэдров), кроме наглядно-образного соответствия количеству вершин тетраэдров. Такая таблица приходит в противоречие со структурообразующим правилом 2). И в таком виде эта таблица не может входить в универсальную структуру n-мерноподобных объектов и существует лишь сама по себе.

Но и для таблицы тетраэдров T, содержащей столбец единиц и строку элементарного тетраэдра и, по существу, отражающей содержание формулы 2), а не геометрических образов, было оставлено геометрическое понимание её строк! Это можно “провозгласить”! Однако оказалось затруднительно для объекта из новой, аналитической реальности (соответствующей правилам 2) и 23)) – элементарного тетраэдра - подыскать соответствие в прежней, геометрической реальности! Это обратило внимание на то, что в таблицах, построенных на аналитической, а не на образной основе, даже если бы и наблюдалось полное соответствие с геометрической точкой зрения, объекты, как их ни назови, тоже - уже другие! Например, мы можем сказать, что “микроскоп – это металлический предмет, достаточно удобный, чтобы им забивать гвозди”, а потом пойти дальше и отождествить его с молотком, на основании того, что, несмотря на внешние отличия, смысла их (отличий) мы, всё равно, не знаем. Однако эти старания не превратят микроскоп в молоток!

Как элемент U_{10} универсальной структуры элементарный тетраэдр (конечно, уместно было бы название взять в кавычки, однако, оставим, ведь, за отсутствием геометрического аналога, перепутать его нам будет не с чем) безусловно, существует! Это позволяет таблице “тетраэдров” почти полностью (за исключением первого элемента $T_0^0 \rightarrow U_{10}^0$, задаваемого “вручную” единицей, что, как уже указывалось, не является проблемным фактором) соответствовать структурообразующему правилу 2) → 23). И это

позволяет таблице “тетраэдров” войти в универсальную структуру n-мерноподобных объектов и удовлетворить правилу межструктурной связи 27)!

Если посмотреть на это с точки зрения главного, сущностного, наиболее важного и второстепенного, вспомогательного, то, на данный момент, мне видится, что геометрическое представление о кубах и тетраэдрах является второстепенным и вспомогательным по сравнению с аналитическим представлением об n-мерноподобных объектах. Оно послужило толчком к осознанию связей между параметрами кубов соседних размерностей (а, чуть позже – то же и для тетраэдров), привело к обнаружению структурозадающих правил 1) и 2) и построению на их основе полных структур этих объектов (N, T), ставших основой для аналитического, внеобразного представления об n-мерноподобных объектах.

Дальнейшее развитие идеи связи между параметрами геометрических кубов и тетраэдров соседних размерностей, выраженное в виде правил 1) и 2) привело к осознанию возможности их обобщения, выраженной в виде правила 23) и существования на его основе множества объектов, которые, по способу связи между параметрами объектов с соседними значениями величины n, напоминают кубы и тетраэдры. Эти объекты в совокупности образуют множество, называемое “универсальной структурой n-мерноподобных объектов”. Будучи изначально построенными на основе правила 23), а не на основе образных геометрических представлений эти объекты (U_{sn}) имеют свойства в виде набора своих параметров, представленных строками структур U_s, где, по существу, уже нет и намёка на какую-либо образность этих объектов. Часть объектов этой структуры (U_{1n}, U_{2n}) частично (как объекты структуры U_{1n}) или полностью (как объекты структуры U_{2n}) по своим свойствам напоминают геометрические объекты – кубы и тетраэдры - и допускают геометрическую интерпретацию, другие же объекты U_{sn} оказываются вне этой возможности.

Для более ясного понимания разницы между n-мерными (геометрическими) и n-мерноподобными объектами, к первым можно отнести объекты, представляемые в виде образов, например, здесь это кубы и тетраэдры (геометрические объекты), а также их продолжения в n-мерные пространства, где n>3, а ко вторым, n-мерноподобным – объекты, изображаемые строками таблиц T, N и U. Свойства последних подобны свойствам геометрических объектов (в частности, свойствам кубов и тетраэдров), то есть, объектам, имеющим размерность. По этой причине эти объекты можно назвать n-мерноподобными.

Конечно, если под объектами таблиц T, N, U_1, U_2 мы будем понимать наборы свойств конкретно кубов и тетраэдров, то тогда их строки нужно

будет связывать с этими объектами и встанет вопрос о том, как выглядит элементарный тетраэдр.

В целом, при задании объектов в виде таблиц T, N, U_s нет никакой необходимости заведомо связывать их с какими-либо геометрическими образами или придавать величине n смысл размерности. Она всего лишь может так интерпретироваться в каком-то частном случае.

В заключение, хотелось бы поблагодарить Юрия Ивановича Кулакова, горячо поддержавшим эти идеи, предложившим мне оформить их в виде данной работы и за живое, заинтересованное обсуждение вопросов, вошедших в неё!

29.01.2011г.

Таблицы.

Таблица 1.

Параметры куба N_n^k / Значение величины n	Количество вершин N_n^0	Количество рёбер N_n^1	Количество граней N_n^2	Количество объёмов N_n^3	Количество 4-х-мерных объёмов N_n^4	Количество 5-ти-мерных объёмов N_n^5
n=0 точка	**1**					
n=1 отрезок	**2**	Из 1 вершины исходит 1 ребро **1** 1 ребро ограничено 2 вершинами				
n=2 квадрат	**4**	Из 1 вершины исходит 2 ребра **4** 1 ребро ограничено 2 вершинами	Из 1 ребра исходит 1 грань **1** 1 грань ограничена 4 рёбрами			
n=3 куб	**8**	Из 1 вершины исходит 3 ребра **12** 1 ребро ограничено 2 вершинами	Из 1 ребра исходит 2 грани **6** 1 грань ограничена 4 рёбрами	Из 1 грани исходит 1 объём **1** 1 объём ограничен 6 гранями		
n=4 4-хмерный куб	**16**	Из 1 вершины исходит 4 ребра **32** 1 ребро ограничено 2 вершинами	Из 1 ребра исходит 3 грани **24** 1 грань ограничена 4 рёбрами	Из 1 грани исходит 2 объёма **8** 1 объём ограничен 6 гранями	Из 1 объёма исходит 1 4-хмерный объём **1** 1 4-хмерный объём ограничен 8 объёмами	
n=5 5-тимерный куб	**32**	Из 1 вершины исходит 5 рёбер **80** 1 ребро ограничено 2 вершинами	Из 1 ребра исходит 4 грани **80** 1 грань ограничена 4 рёбрами	Из 1 грани исходит 3 объёма **40** 1 объём ограничен 6 гранями	Из 1 объёма исходит 2 4-хмерных объёма **10** 1 4-хмерный объём ограничен 8 объёмами	Из 1 4-хмерного объёма исходит 1 5-тимерный объём **1** 1 5-мерный объём ограничен 10 4-мерными объёмами

Таблица 2.

Параметры куба N_n^k / Значение величины n	Количество вершин N_n^0	Количество рёбер N_n^1	Количество граней N_n^2	Количество объёмов N_n^3	Количество 4-х-мерных объёмов N_n^4	Количество 5-х-мерных объёмов N_n^5	Количество 6-ти-мерных объёмов N_n^6	Количество 7-ти-мерных объёмов N_n^7	Количество 8-х-мерных объёмов N_n^8	Количество 9-ти-мерных объёмов N_n^9
n=0 нульмерный куб	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=1 одномерный куб	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
n=2 двумерный куб	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0
n=3 трёхмерный куб	8	12	6	1	0	0	0	0	0	0
n=4 4-хмерный куб	16	32	24	8	1	0	0	0	0	0
n=5 5-тимерный куб	32	80	80	40	10	1	0	0	0	0
n=6 6-хмерный куб	64	192	240	160	60	12	1	0	0	0
n=7 7-тимерный куб	128	448	672	560	280	84	14	1	0	0
n=8 8-хмерный куб	256	1024	1792	1792	1120	448	112	16	1	0
n=9 9-тимерный куб	512	2304	4608	5376	4032	2016	672	144	18	1
n=10 10-тимерный куб	1024	5120	11520	15360	13440	8064	3360	960	180	20
n=11 11-тимерный куб	2048	11264	28160	42240	42240	29568	14784	5280	1320	220
n=12 12-тимерный куб	4096	24576	67584	112640	126720	101376	59136	25344	7920	1760

Таблица3.

Параметры тетраэдра T_n^k / Значение величины n	Количество элем. тетраэдров T_n^0	Количество вершин T_n^1	Количество рёбер T_n^2	Количество граней T_n^3	Количество объёмов T_n^4	Количество 4-х-мерных объёмов T_n^5	Количество 5-ти- мерных объёмов T_n^6
n=0 элементарный тетраэдр	1	0	0	0	0	0	0
n=1 нульмерный тетраэдр	1	1	0	0	0	0	0
n=2 одномерный тетраэдр	1	2	Из 1 вершины исходит 1 ребро 1 1 ребро ограничено 2 вершинами	0	0	0	0
n=3 двумерный тетраэдр	1	3	Из 1 вершины исходит 2 ребра 3 1 ребро ограничено 2 вершинами	Из 1 ребра исходит 1 грань 1 1 грань ограничена 3 рёбрами	0	0	0
n=4 3-хмерный тетраэдр	1	4	Из 1 вершины исходит 3 ребра 6 1 ребро ограничено 2 вершинами	Из 1 ребра исходит 2 грани 4 1 грань ограничена 3 рёбрами	Из 1 грани исходит 1 объём 1 1 объём ограничен 4 гранями	0	0
n=5 4-хмерный тетраэдр	1	5	Из 1 вершины исходит 4 ребра 10 1 ребро ограничено 2 вершинами	Из 1 ребра исходит 3 грани 10 1 грань ограничена 3 рёбрами	Из 1 грани исходит 2 объёма 5 1 объём ограничен 4 гранями	Из 1 объёма исходит 1 4-хмерный объём 1 1 4-мерный объём ограничен 5 объёмами	0

Таблица 4.

Параметры тетраэдра T_n^k / Значение величины n	Ни-что	Ничто	Количество элементарных тетраэдров T_n^0	Количество вер-шин T_n^1	Количество рёбер T_n^2	Количество граней T_n^3	Количество объёмов T_n^4
n=0 элементарный **тетраэдр**	**0**	Из 1 ничто исходит 2 ничто **0** 1 ничто огр-но ничто	Из 1 ничто исходит 1 элемент. тетраэдр **1** 1 элемент. тетраэдр ограничен 0 ничто	**0**	**0**	**0**	**0**
n=1 нульмерный тетраэдр	**0**	Из 1 ничто исходит 3 ничто **0** 1 ничто огр-но ничто	Из 1 ничто исходит 2 элемент. тетраэдр **1** 1 элемент. тетраэдр ограничен 0 ничто	Из 1 элемент. тетер исходит 1 вершина **1** 1 вершина огр-на 1 элементар.тетраэд	**0**	**0**	**0**
n=2 одномерный тетраэдр	**0**	Из 1 ничто исходит 4 ничто **0** 1 ничто огр-но ничто	Из 1 ничто исходит 3 элемент. тетраэдр **1** 1 элемент. тетраэдр ограничен 0 ничто	Из 1 элемент. тетер исходит 2вершины **2** 1 вершина огр-на 1элемент.тетраэд.	Из 1 вершины исходит 1 ребро **1** 1 ребро ограничено 2вершинами	**0**	**0**
n=3 двумерный тетраэдр	**0**	Из 1 ничто исходит 5 ничто **0** 1 ничто огр-но ничто	Из 1 ничто исходит 4 элемент. тетраэдр **1** 1 элемент. тетраэдр ограничен 0 ничто	Из 1 элемент. тетер исходит 3вершины **3** 1 вершина огр-на 1 элементар.тетраэд	Из 1 вершины исходят 2 ребра **3** 1 ребро ограничено 2вершинами	Из 1 ребра исходит 1 грань **1** 1 грань огр-на 3 рёбрами	**0**
n=4 3-хмерный тетраэдр	**0**	Из 1 ничто исходит 6 ничто **0** 1 ничто огр-но ничто	Из 1 ничто исходит 5 элемент. тетраэдр **1** 1 элемент. тетраэдр ограничен 0 ничто	Из 1 элемент. тетер исходит 4вершины **4** 1 вершина огр-на 1 элементар.тетраэд	Из 1 вершины исходит 3 ребра **6** 1 ребро ограничено 2вершинами	Из 1 ребра исходит 2 грани **4** 1 грань огр-на 3 рёбрами	Из 1 грани исходит 1 объём **1** 1 объём огр-н 4 гранями
n=5 4-хмерный тетраэдр	**0**	Из 1 ничто исходит 7 ничто **0** 1 ничто огр-но ничто	Из 1 ничто исходит 6 элемент. тетраэдр **1** 1 элемент. тетраэдр ограничен 0 ничто	Из 1 элемент. тетер исходит 5 вершин **5** 1 вершина огр-на 1 элементар.тетраэд	Из 1 вершины исходит 4 ребра **10** 1 ребро ограничено 2вершинами	Из 1 ребра исходит 3 грани **10** 1 грань огр-на 3 рёбрами	Из 1 грани исходят 2 объёма **5** 1 объём огр-н 4 гранями

Таблица 5.

Параметры объекта U_{1n}^{k} / Значения n	U_{1n}^{0}	U_{1n}^{1}	U_{1n}^{2}	U_{1n}^{3}	U_{1n}^{4}	U_{1n}^{5}	Параметры объекта U_{2n}^{k} / Значения n	U_{2n}^{0}	U_{2n}^{1}	U_{2n}^{2}	U_{2n}^{3}	U_{2n}^{4}	U_{2n}^{5}
n=0	1						n=0	1					
n=1	1	1					n=1	2	1				
n=2	1	2	1				n=2	4	4	1			
n=3	1	3	3	1			n=3	8	12	6	1		
n=4	1	4	6	4	1		n=4	16	32	24	8	1	
n=5	1	5	10	10	5	1	n=5	32	80	80	40	10	1

$$U_{1n}^{k} = 1 \cdot U_{1(n-1)}^{k} + U_{1(n-1)}^{k-1}$$

$$U_{1n}^{k} = 1^{(n-k)} \cdot n! \,/\, (k!(n-k)!)$$

$$U_{2n}^{k} = 2 \cdot U_{1(n-1)}^{k} + U_{2(n-1)}^{k-1}$$

$$U_{2n}^{k} = 2^{(n-k)} \cdot n! \,/\, (k!(n-k)!)$$

Таблица 6.

Параметры объекта U_{3n}^k / Значения n	U_{3n}^0	U_{3n}^1	U_{3n}^2	U_{3n}^3	U_{3n}^4	U_{3n}^5	Параметры объекта U_{4n}^k / Значения n	U_{4n}^0	U_{4n}^1	U_{4n}^2	U_{4n}^3	U_{4n}^4	U_{4n}^5
n=0	1						n=0	1					
n=1	3	1					n=1	4	1				
n=2	9	6	1				n=2	16	8	1			
n=3	27	27	9	1			n=3	64	48	12	1		
n=4	81	108	54	12	1		n=4	256	256	96	16	1	
n=5	243	405	270	90	15	1	n=5	1024	1280	640	160	20	1

$$U_{3n}^k = 3 \cdot U_{3(n-1)}^k + U_{3(n-1)}^{k-1}$$

$$U_{3n}^k = 3^{(n-k)} \cdot n! / (k!(n-k)!)$$

$$U_{4n}^k = 4 \cdot U_{4(n-1)}^k + U_{4(n-1)}^{k-1}$$

$$U_{4n}^k = 4^{(n-k)} \cdot n! / (k!(n-k)!)$$

ОГЛАВЛЕНИЕ.